

Durchdringungskörper in der Raumgeometrie

Matthias Ludwig

<http://ph-weingarten.de/lehrende/ludwig/muheft6/durchdringungen/>

1 Einführung

Platonische Körper und insbesondere Ikosaeder oder Pentagondodekaeder faszinieren oft schon alleine durch ihre Proportionen. Durchdringungskörper bieten durch ihre Verschneidungen und die unterbrochenen Flächen noch mehr Reize. Diese Reize können vielschichtiger Natur sein. Paolo Ucello hat 1420 in der Basilica di San Marco in Venedig wohl als erster das kleine gesternte Dodecaeder in ein Mosaik „gezeichnet“ (Abbildung 1). Weit über hundert Jahre später zeichnete der Nürnberger Goldschmied Wentzel Jamnitzer (1508-1585) 1568 in seinem Buch *Perspectiva Corporum Regularium* das große gesternte Dodecaeder (Abbildung 2) und näherungsweise das große Dodecaeder (Abbildung 3 links unten). Auch eine Durchdringung von Würfel und Oktaeder sowie von Dodekaeder und Ikosaeder (Abbildung 3 rechts oben) wurde von ihm veröffentlicht. Nebenbei bemerkt ist dieses Buch ein Meisterstück geometrischen Designs.

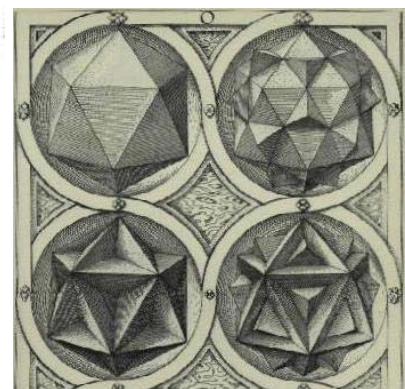
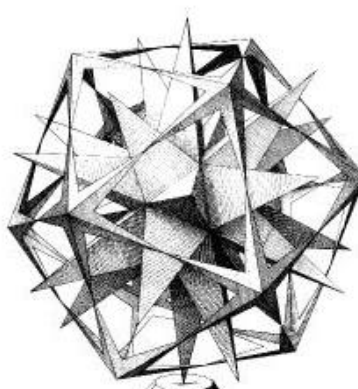


Abbildung 1
Kleiner gesternter Dodecaeder
Mosaik von P.Ucello Basilika S. Marco

Abbildung 2
Großer gesternter Dodecaeder in einem Ikosaeder
4. Kupferstich zu den Polyeder von W. Jamnitzer (1568)

Abbildung 3
Großer Dodekaeder (l. u.)
2. Kupferstich aus einer Serie zum Ikosaeder von W. Jamnitzer (1568)

Wir wollen uns aber hier mehr auf die mathematischen bzw. geometrischen Reize konzentrieren. Ein wohl erster mathematischer Zugang zu den Durchdringungskörpern wurde 1619 von Johannes Kepler (1571-1630) in seinem Buch *Harmonice Mundi* beschrieben. Hier behandelt er den kleinen gesternten Dodekaeder und den großen gesternten Dodekaeder. Louis Poincaré (1777-1859)

beschrieb 1809 den großen Dodekaeder (den Jamnitzer 1568 schon ähnlich gezeichnet hatte) und das große Ikosaeder.

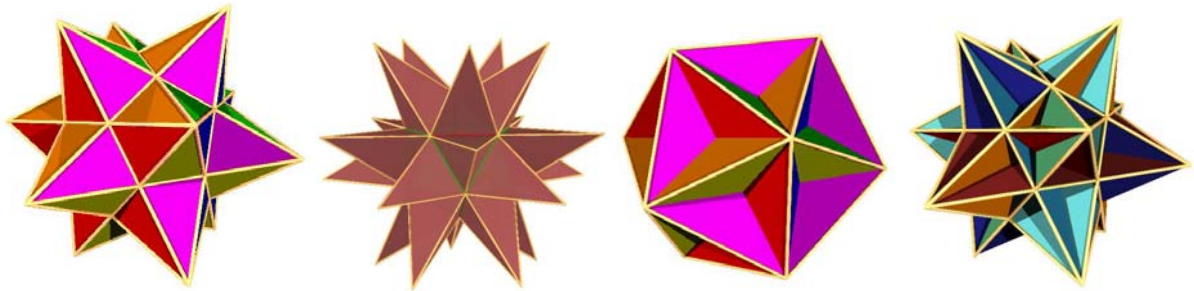


Abbildung 4: Diese vier Durchdringungskörper, die so genannten Kepler-Poinsot-Körper, heißen von links nach rechts: Kleiner gesternter Dodekaeder, großer gesternter Dodekaeder, großer Dodekaeder und großer Ikosaeder.

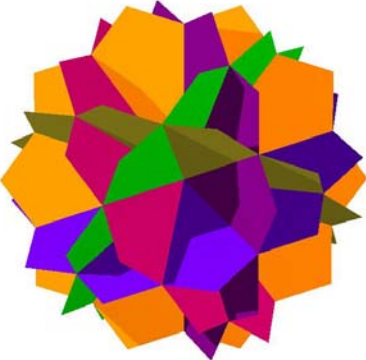
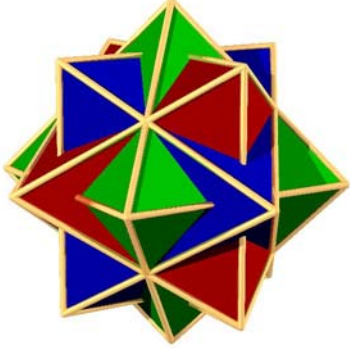
2 Arten der Durchdringung

Schon auf den bisherigen Bildern erkennt man, dass die Durchschnitte alle einen hohen Symmetriegrad aufweisen. Wir wollen uns auch weiterhin nur mit solchen symmetrischen Durchschnitten beschäftigen. Weiter fällt auf, dass es zwei verschiedene Arten von Durchdringungen gibt. Zum einen können sich Flächen bzw. Polygone durchdringen. Betrachten wir hierzu Abbildung 4. Hier durchdringen sich beim großen und kleinen gesterntem Dodekaeder 12 Pentagramme, beim großen Dodekaeder erkennt man 12 regelmäßige sich schneidende Fünfecke. Beim großen Ikosaeder durchdringen sich zwanzig Dreiecke, was aber zugegebenermaßen nicht so leicht zu sehen ist. Wenn wir nun Abbildung 3 betrachten, sehen wir rechts oben eine Durchdringung von zwei Polyedern. In diesem Fall durchdringen sich ein Dodekaeder und ein Ikosaeder. Man kann also die Durchdringungen in zwei Klassen einteilen: die Klasse der Polyederdurchdringungen und die Klasse der Polygondurchdringungen.

2.1 Durchdringende Polygone

Gehen wir hier zunächst einmal näher auf die Durchdringung von Polygonen ein. Sobald sich Polygone durchdringen hat man keinen konvexen Körper mehr. Es können sich sogar Polygone durchdringen ohne dass sich ein Körper bildet. So durchschneiden sich in Abbildung 5 12 regelmäßige Fünfecke so, dass sie alle einen gemeinsamen Umkreismittelpunkt haben. Man könnte also diese Skulptur in eine Kugel einbeschreiben. Wir wollen hier aber nur solche Fälle betrachten, wo sich Polygone so im Raum schneiden, dass ein Polyeder mit Rauminhalt, also ein Körper

entsteht. Auch wollen wir uns der Einfachheit halber auf Durchdringungskörper beschränken, welche durch kongruente Polygone erzeugt werden. Allerdings lassen wir zu, dass „Lücken“ durch andere aber ebenfalls kongruente Polygone abgedeckt werden.

	
<p>Abb.5: Zwölf Pentagons durchdringen sich in ihrem Umkreismittelpunkt.</p>	<p>Abb.6: Drei Oktaeder durchdringen sich.</p>

2.2 Durchdringende Polyeder

Bei sich durchdringenden Polyedern hat man nicht das Problem, dass sich anschließend kein Körper ergibt. Aber auch hier erhält im Normalfall beim Schnitt von mehreren konvexen Polyedern einen nicht konvexen Durchdringungskörper. Um nicht zu komplexe bzw. zu komplizierte Durchdringungskörper zu erhalten, wollen wir uns hier nur mit Durchdringungen aus regelmäßigen konvexen Körpern, also den Platonischen Körpern beschäftigen. Auch soll die Einschränkung gelten, dass sich die Durchdringungen aus den Symmetrieeigenschaften der Platonischen Körper herauskristallisieren müssen. So erhält man Körper mit ähnlichen meistens aber geringeren Symmetrieeigenschaften. In Abbildung 6 ist ein Oktaederdrilling zu sehen. Dieser entsteht dadurch, dass das blaue und das rote Oktaeder jeweils um eine zwei-zählige Symmetrieachse um jeweils 90° herausgedreht wurden.

3 Beispiele

Wir wollen uns nun zwei Durchdringungskörper (siehe Abb.8 und Abb.9) nähern, die als Grundkörper den Pentagondodekaeder (Abb.7) haben.

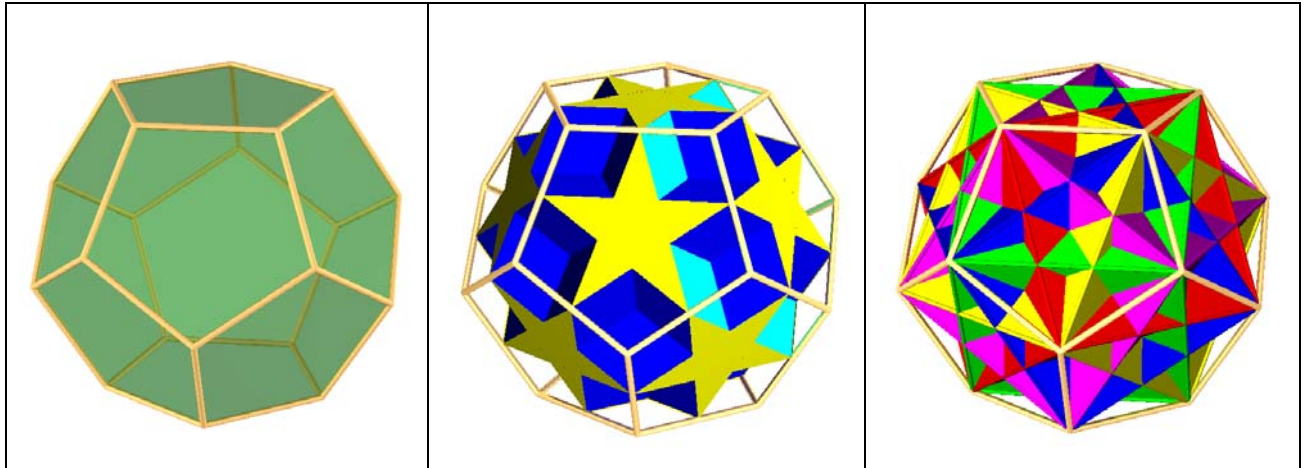


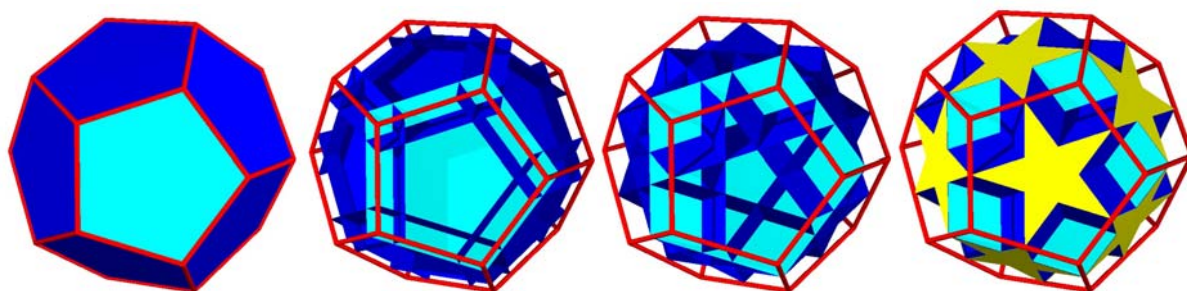
Abb.7: Das Dodekaeder

Abb. 8: Das Dodekadodekaeder

Abb. 9: Der Würfelfünfling

3.1 Der Dodecadodecaeder

In Abbildung 8 ist eine Durchdringung von 12 regelmäßigen Fünfecken zu sehen (Siehe auch HOLDEN 1971 S. 119 oder WENNINGER 1971 S. 112.). Allerdings sieht man, dass die blauen Fünfecke alleine keinen geschlossenen Körper bilden. Die Lücken müssen durch 12 gelbe Sterne (Pentagramme) abgedeckt werden. Vom mathematischen und didaktischen Standpunkt aus ist es interessant zu untersuchen, wie diese Durchdringung entstanden ist. Zunächst erkennt man, dass sich aus Symmetriegründen die Ecken der blauen Fünfecke auf den Kantenmitten des großen Dodekaeders berühren. Man könnte sich also vorstellen, dass man die Fünfecksflächen des großen Dodekaeders entlang seiner Kanten in Richtung Dodekaederzentrum verschiebt. In der Abbildungssequenz 10 erkennt man deutlich, dass sich die 12 Fünfecke gleichmäßig durchschneiden bis sich die Ecken der Fünfecke berühren. Es gibt noch eine weitere Möglichkeit wie das Dodekadodekaeder entstehen kann (siehe Ludwig 2002). Sie basiert darauf, dass man die Fünfecke nicht verschiebt sondern einfach nur solange vergrößert bis sich die Fünfecke wieder an den Ecken berühren.



Abbildungssequenz 10: Die verschiedenen Stufen vom Dodekadodekaeder über bis zum Dodekadodekaeder.

Nun ist das Erzeugen von Bildern dieses Körpers mit dem Computer eine Sache. Eine andere ist das aktive Herstellen also der Bau solch eines Körpers. Während man sich bei der Computersimulation Gedanken über die Koordinaten der Eckpunkte des Körpers machen muss, muss man sich beim Bau Gedanken über die Einzelteile (gelbe Sterne und blaue Rauten) und deren Abmessungen machen. Beim Erstellen des Bauplans für den Dodekadodekaeder muss man nicht rechnen können, aber man braucht geometrisches Wissen. Der Ausschnitt (Abb.11) zeigt, dass man von einem regelmäßigen Fünfeck ausgehen darf. Dem Fünfeck ist ein (gelbes) Pentagramm so einbeschrieben, dass es die Seitenmitten berührt. Die Pentagrammseiten sind damit parallel zu den Fünfecksseiten. Daraus folgt nun, dass die Kantenlänge der blauen Rauten gleich der halben Kantenlänge des regelmäßigen Fünfecks ist und ein Rautenwinkel dem Innenwinkel (108°) des regelmäßigen Fünfecks entspricht. Drei Rauten bilden eine „Körperecke“ und man kann so ein Netz für diese Einstülpung angeben. Damit sind alle Bauteile (siehe Abb. 12) bestimmt und wir können mit dem Bau beginnen. Man muss sich jetzt nur noch klarmachen wie viele Sterne und wie viele „Körperecken“ man herstellen muss. Ein Blick auf das Dodekaeder zeigt uns, dass es zwölf Sterne und zwanzig „Körperecken“ sind.

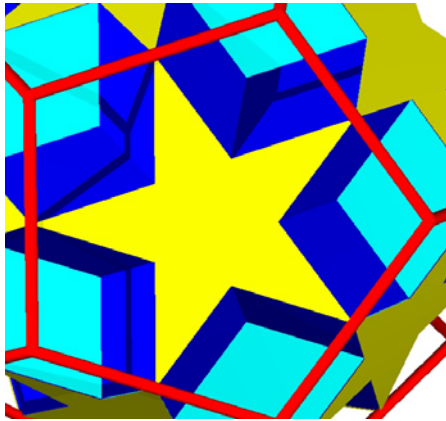


Abb.11:Ausschnitt aus dem Dodekadodekaeder

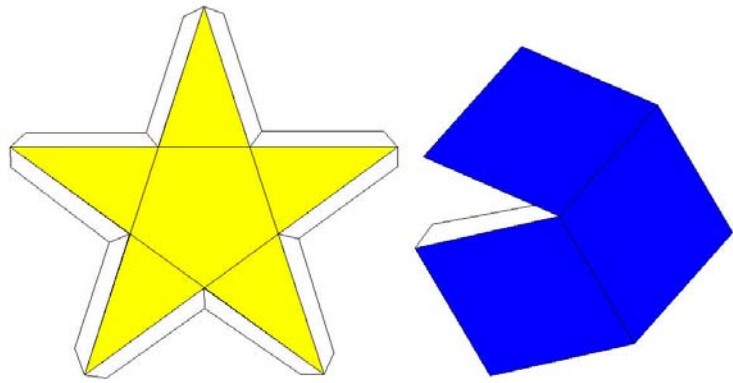


Abb. 12: Die Schablonen für das Pentagramm und die dazu passenden drei Rauten.

3.2 Der Würfelfünfling

Auch der Würfelfünfling hat als Grundgerüst das Pentagondodekaeder. Bei diesem Durchdringungskörper muss man sich erst einmal klarmachen, dass sich hier wirklich fünf Würfel durchdringen (siehe auch ADAM UND WYSS 1994 S.103 oder CUNDY AND ROLLETT 1971 S.135). Dies gelingt indem man sich erst einmal verdeutlicht, dass man einen Würfel in ein Dodekaeder einbeschreiben kann. In Abbildung 12 ist ein Kantenmodell eines Körpers einbeschrieben, von dem wir nachweisen wollen, dass es sich um einen Würfel handelt. Alle Kanten dieses Körpers haben die gleiche Länge, weil die Kanten des Körpers immer eine Diagonale eines Fünfecks sind. Nun besitzt das Dodekaeder auf Grund seiner Symmetrieeigenschaften mehrere Spiegelebenen. In Abbildung 13 ist eine der 15 Spiegelebenen zu sehen. Die Kanten des roten Modells stehen also alle senkrecht aufeinander. Das rote Kantenmodell ist also in der Tat ein Würfel. In Abbildung 14 ist er zu sehen.

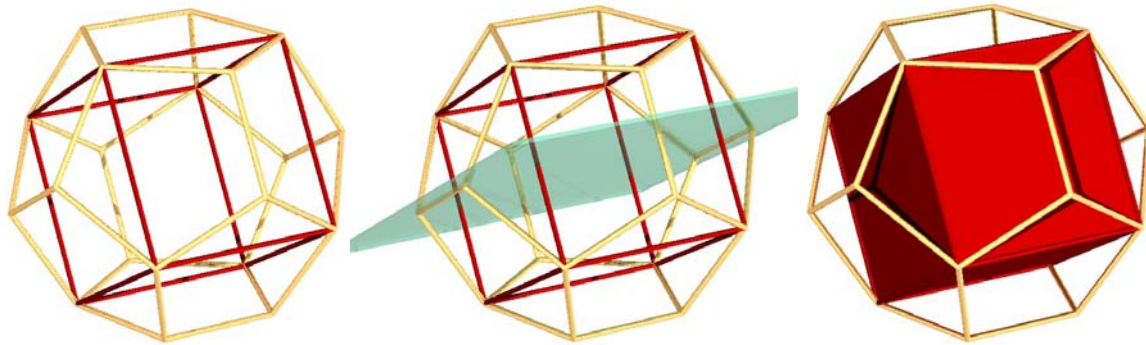


Abb. 12: Die Kanten sind Fünfeckdiagonalen

Abb. 13: Die Symmetrieebene verdeutlicht die rechten Winkel

Abb. 14: Der eingeschriebene Würfel im Dodekaeder.

Das Pentagondodekaeder hat eine fünf-zählige Drehsymmetrie bzgl. der Flächenachsen. Es gibt also fünf paarweise verschiedene Möglichkeiten den roten Würfel in das Dodekaeder einzubeschreiben. In Abbildung 15 sehen wir den blauen Würfel, der um 72° gegenüber dem roten Würfel weiter gedreht wurde. Auf diese Weise kann man fünf verschiedene Würfel einbeschreiben (siehe Abbildung 17).

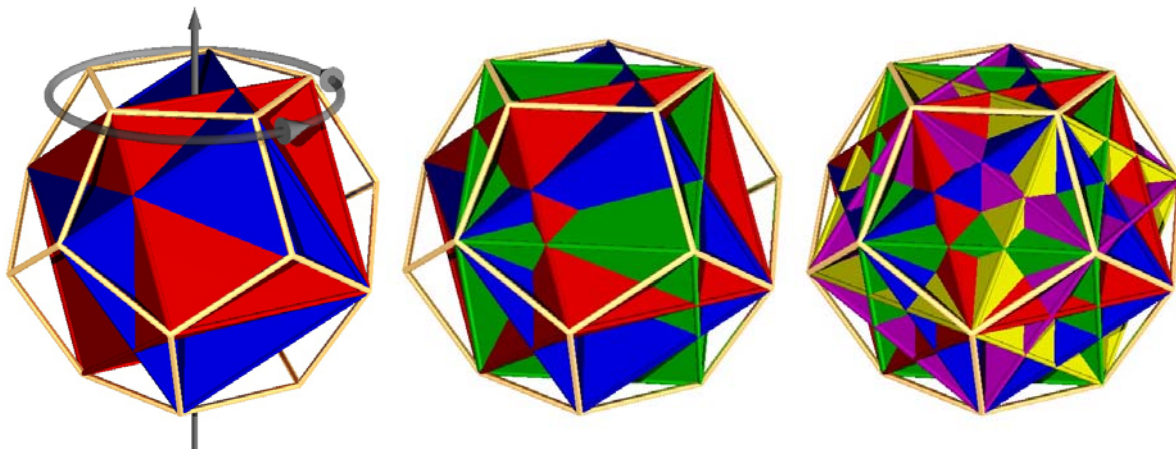


Abb. 15: Der blaue Würfel wird um 72° gegenüber dem roten gedreht.

Abb. 16: der dritte Würfel ist eingeschrieben.

Abb. 17: Der Würfelfünfling ist komplett.

Der Bau dieses Durchdringungskörpers ist ein wenig komplizierter als der in 3.2 besprochene. Auch hier muss man sich zunächst um die einzelnen Bauteile kümmern. Wir erkennen deutlich (siehe Abb. 17), dass die Kanten der fünf verschiedenen Würfel auf jeder Dodekaederseite ein Pentagramm bilden. Die Würfelkanten werden also im Verhältnis $1:\sigma:1$ geteilt (wobei $\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618\dots$). Nachdem dies für jede Würfelkante gilt, kann man so die Schablonen für die einzelnen Bauteile erzeugen, indem man die Kantenschnittpunkte über eine

Quadratseite (siehe Abb. 20) miteinander verbindet (Was im Modell durch die Schnitte mit den anderen Würfel ohnehin geschieht.). Die Abbildungen 18, 19 und 20 zeigen dies.

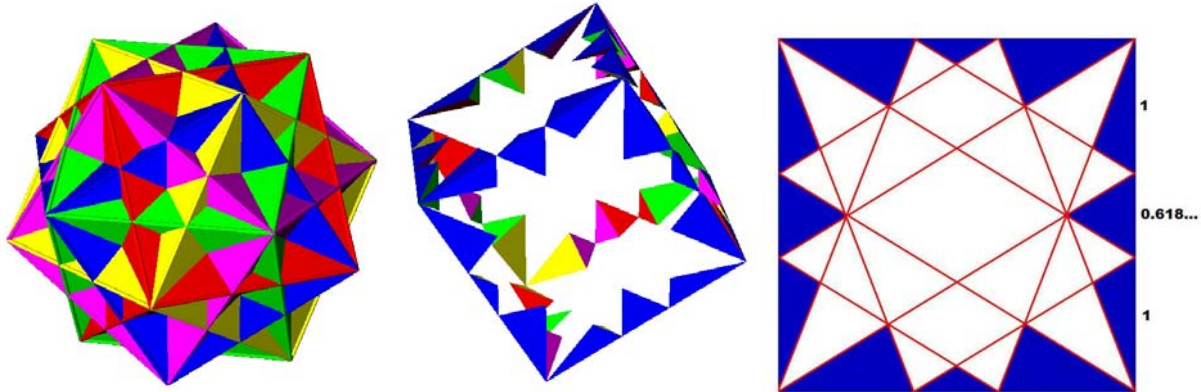


Abb. 18: Der komplette Fünfling	Abb. 19: Das Gerüst für jede Würfelfarbe.	Abb. 20: Das ist die Schablone aus der die Bauteile hergestellt werden.
---------------------------------	---	---

Insgesamt muss man für jeden der fünf Würfel zwölf Kanten in einer Farbe herstellen, macht also 60 Kanten. Jede Kante besteht aus drei Bauteilen. Somit muss man 180 Bauteile zurechtschneiden. Wir haben den Körper somit in seine „atomaren“ Bestandteile zerlegt.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Wir sind mit der Aussage gestartet, dass Platonische Körper und erst recht Durchdringungen faszinieren. Dass dies so ist belegen verschiedensten Aufsätzen, Bücher und Webseiten (z.B. ADAM UND WYSS 1994, CUNDY und ROLLETT 1997, HART 2002 und www.georgehart.com, LUDWIG 2002, ZEITLER 2001 u.s.w.). Aber nicht nur Mathematiker und Didaktiker interessieren sich für die symmetrischen Körper sondern auch Schülerinnen und Schüler haben ihren mathematischen Spaß am Bau und Berechnen dieser Compounds (englisch für Verbundkörper)(z.B. LUDWIG 1996 und 1998). Schüler können so fasziniert von diesen Körpern sein, dass sie ganze Ausstellungen und „Körperwelten“ erschaffen. Sie können gar nicht mehr mit dem „Basteln“ aufhören. Nur wo bleibt die Mathematik? Im vorliegenden Aufsatz findet man keine einzige Berechnungsformel. Das ist auch gut so, denn alle Seitenverhältnisse lassen sich aus einem regelmäßigen Fünfeck mit Zirkel und Lineal ableiten. Ist das nicht auch wieder erstaunlich wie wenig Mathematik man braucht,

um die Entstehung solch komplexer Körper zu verstehen und Baupläne für Sie zu erstellen. Aber genau das ist doch auch ein Wesenszug der Mathematik: zunächst komplexe Strukturen auf ihre Bestandteile hin zu analysieren und sich dann über die Einfachheit und den „atomaren“ Aufbau der Struktur erfreuen.

Abschließend bleibt zu sagen: Das Körperbasteln oder Körperbauen besitzt immer zwei Komponenten, eine mathematische und die handwerkliche. Beide Komponenten ergänzen sich hervorragend. Einerseits benötigt man das Handwerk, um das mathematische Wissen umzusetzen. Andererseits braucht man die Mathematik um überhaupt die Baupläne erstellen zu können. Wenn dann beim Bau des Körpers alles passt, kommt immer ein besonders befriedigendes Gefühl auf, welches auf beiden Komponenten beruht. Einerseits weiß man, dass man richtig gerechnet bzw. konstruiert hat und andererseits ist das Ergebnis auch nur durch eine gute handwerkliche Leistung möglich. Dieses Gefühl, welches das Selbstvertrauen in die eigenen Fähigkeiten besonders fördert kann man den Schülerinnen und Schülern eigentlich nicht oft genug vermitteln.

5 Literatur

Adam, P., Wyss, A.: *Platonische und Archimedische Körper*, Verl. Freies Geistesleben (Stuttgart), 1994

Cromwell, P.R.: *Polyhedra*, Cambridge University Press(Cambridge), 1997

Cundy, H. M., Rollett, A.P.: *Mathematical Models*, Reprint, Tarquin (Norfolk), 1997

Gurkewitz, R., Arnstein, B.: *3-D Geometric Origami-Modular Polyhedra*, Dover Publications (New York), 1995

Hart, G.-W.: *In the Palm of Leonardo's Hand*, Nexus Network Journal, vol. 4, no. 2, Spring 2002; Nachdruck in *Symmetry: Culture and Science*, vol. 11, 2000 (appeared in 2003), S. 17-25

Hart.G.-W.: <http://www.georgehart.com/>

Holden, A.: *Shapes, Space, and Symmetry*, Dover Publications (New York), 1971

Jamnitzer, W.: *Perspectiva Corporum Regularium*, Nürnberg, 1568, Reprint: Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Graz 1973. (online version: <http://www.polyhedra.de/>)

Kepler, J.: *Harmonice Mundi*, 1619

Ludwig, M.: *Projektorientierter Mathematikunterricht, Folge 4: Projektthema: Reguläre Polygone und Polyeder*, Math. i. d. Schule, 34(1996), S.211-215

Ludwig, M.: *Platonische Durchdringungen - ein Projekt im Mathematikunterricht der Klasse 10*, in: U. Kirchgraber, (Hrsg.), *Berichte über Mathematik und Unterricht* No. 98-04 (ETH Zürich), 1998

Ludwig, M.: *Sterne und Sternkörper*, Mathe-Welt (114) (Seelze), 2002

Wenninger, M.: *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1971

Zeitler, H.: *Aus dem Spiegelkabinett*, *Der Mathematikunterricht* (2001), S. 31-56 (Seelze), 2001